Экстремумы и логарифмическая гёльдеровость степенных функций Такаги

Галкин О.Е.[1] **и Галкина С.Ю.**[1]

[1] *Национальный исследовательский университет „Высшая школа экономики“*

Доклад посвящен изучению свойств степенных функций Такаги $S_p(x)$. Эти функции по конструкции аналогичны непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги $T(x)$, описанной в 1903 году. Они имеют один вещественный параметр $p > 0$ и могут быть заданы так:

Определение 1. *Степенной функцией Такаги с параметром (показателем)* $p > 0$ мы называем вещественнозначную функцию S_p, задаваемую на числовой оси $\mathbb{R}$ с помощью равенства

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{S_0(2^n x)}{2^n} \right)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^n x)}{2^{np}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $S_0(x) = \bigl| x - \lfloor x + 1/2 \rfloor \bigr| = \rho(x, \mathbb{Z}) = \inf_{q \in \mathbb{Z}} |x - q|$ — расстояние между точкой x и ближайшей к ней целой точкой, $\lfloor y \rfloor$ — целая часть числа $y \in \mathbb{R}$, $\{y\}$ — дробная часть числа y.

При $p = 1$ функция $S_p(x)$ совпадает с функцией Такаги $T(x)$.

Частичные суммы ряда (1) будем обозначать через $S_{p,m}(x)$:

$$S_{p,m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{S_0^p(2^k x)}{2^{kp}}.$$

График степенной функций Такаги $y = S_p(x)$, изображенный сплошной синей линией, вместе с графиками частичных сумм $y = S_{p,n}(x)$ при

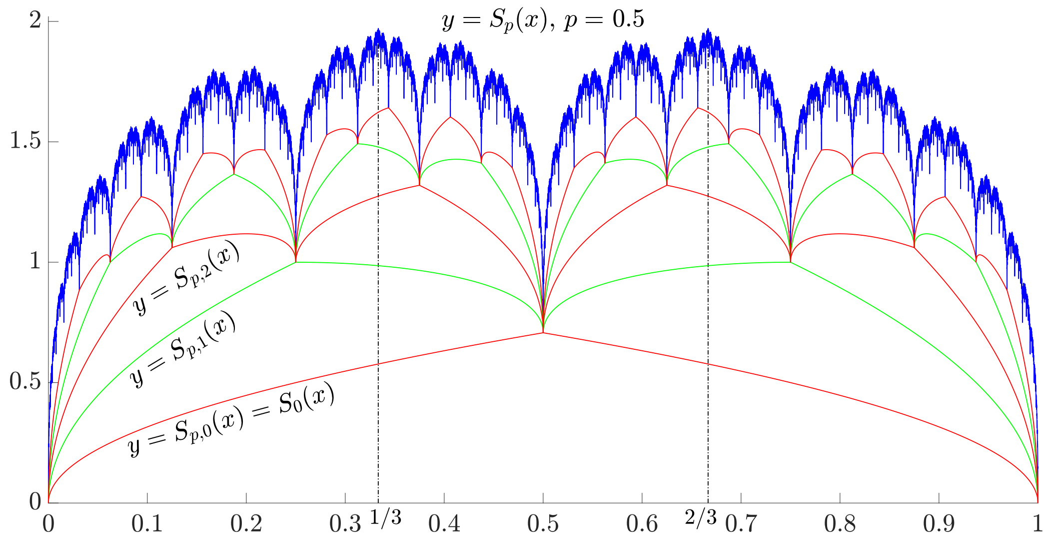

Рис. 1: График функции $y = S_p(x)$ при $p = 0{,}5$.

$n = 0, 1, 2, 3, 4$, изображенными красными и зелеными линиями, для случая $p = 0{,}5$, можно увидеть на рисунке 1. Вертикальные штрихпунктирные линии указывают положение двух точек глобального максимума на отрезке $[0; 1]$: $x = 1/3$ и $x = 2/3$.

Мы получили, в частности, следующие результаты:

1) Функции S_p на $\mathbb{R}$ при любом $p > 0$ непрерывны, имеют период 1, симметричны и ограничены, причём в случае $p \in (0; 1)$ они нигде не дифференцируемы.
2) Для $p \in (0; 1)$ глобальный максимум функции S_p равен $2^p/(3^p(2^p - 1))$ и достигается только в точках вида $q + 1/3$ и $q + 2/3$, где $q \in \mathbb{Z}$, а глобальный минимум равен 0 и достигается только в целых точках.
3) При $p \in (0; 1]$ степенная функция Такаги S_p удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера $|S_p(x) - S_p(y)| \leqslant C \cdot |x-y|^p \cdot \log_3 \big(1/|x-y|\big)$ с наименьшей константой $C = 2^p/(2^p - 1)$. Отсюда вытекает „обычное“ условие Гёльдера для S_p.
4) В случае $p \in (0; 1)$ в двоично-рациональных точках, и только в них, функция S_p достигает строгого локального минимума на $\mathbb{R}$, а в точках вида $q/(3 \cdot 2^n)$, где $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, q — целое и не делится на 3, S_p достигает строгого локального максимума.